

Matematiksvårigheter

Matematikinlärnings epistemologi och kognition

Ola Helenius, 250331

Ola Helenius

- **Professor i matematikdidaktik**
- **Doktor i abstrakt algebra och multiplikativ talteori**
- **Arbetat med TRR sedan 2010 (16 kommuner)**
- **En av konstruktörerna av matematiklyftet**
- **Expert regeringens läroplansutredning**
- **MUSK - skriftlig matematisk kommunikation**
- **Samarbete med Halmstad, Sigtuna, Skara och Varbergs - Algebramåndag**

En person - ett barn vanligen - som i egenskap av elev i skolan och givet den undervisning som bedrivs har svårare att lära sig den av samhället föreskrivna skolmatematiken än vad man kan förvänta sig om man beaktar elevens övriga skolprestationer

En person - ett barn vanligen - som i egenskap av elev i skolan och givet den undervisning som bedrivs har svårare att lära sig den av samhället föreskrivna skolmatematiken än typiska elever

Vilka problem?

Aritmetik och algebra

Matematik

En abstrakt och generell vetenskap för problemlösning (NE)

Räkna - mäta - hitta - designa - spela/leka - förklara (Bishop)

...och metodutveckling (NE)

och utveckling och användning av symbolsystem

Stringenta framställningar (definition, sats, bevis, logiska system, begrepp får sin mening i relation till andra begrepp)

Ett kulturellt verktyg för att lösa problem
(dvs hjälpa just vår hjärna att lösa problem)

(Den grundläggande) matematikens epistemologi

38. Division – delningsdivision



Charlie, Isa och Liam delar 12 godisbitar lika mellan sig.
"En till Charlie, en till Isa, en till Liam, en till Charlie, en till Isa, en till Liam ..."

C I L C I L C I L C I L

Alla får fyra godisbitar var.

1. Dela godisbitarna lika mellan Charlie (C), Isa (I) och Liam (L). Hur många godisbitar får de var?

Öva begreppen.

Lyssna på berättelsen.



Svar: 1 godisbit



Svar: godisbitar

39. Division – innehållsdivision

Film

Lyssna på berättelsen.

Charlie lägger
12 bullar i påsar.
Han lägger 4
bullar i varje påse.

Hur många påsar
behöver Charlie?

Svar: 3 påsar



1. Du lägger 18 bullar i påsar. Hur många påsar behöver du?

- a. Det ska vara 3 bullar i varje påse.



Svar: påsar

- b. Det ska vara 6 bullar i varje påse.



Svar: _____

(Den grundläggande) matematikens epistemologi

40. Att skriva division

 Lyssna på berättelsen.

 Film



Det finns sex glasskolor.
I varje bågare ska det vara
2 klor glass. Hur många
bågare behövs det?

Divisionen kan skrivas

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \frac{\text{täljare}}{\text{nämnare}} = \text{kvot}$$

eller

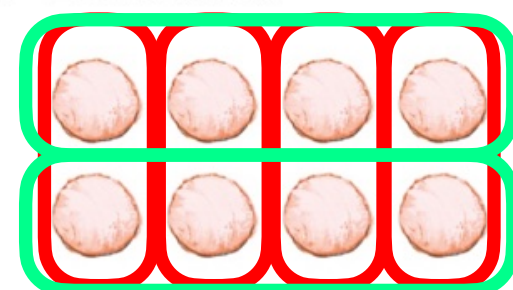
$$6/2 = 3$$

täljare/nämnare = kvot

Du säger: Sex delat med två är
lika med tre, eller sex dividerat
med två är lika med tre.



1. Dividera.



a. $\frac{8}{2} = \underline{\quad}$



b. $\frac{9}{3} = \underline{\quad}$

41. Sambandet mellan division och multiplikation

 Film

 Lyssna på berättelsen.



Det finns 12 böcker. Hur
många högar får du, om du
lägger 4 böcker i varje hög?

$$\frac{12}{4} = 3$$

Du kan kontrollera division
med multiplikation.

$$3 \cdot 4 = 12$$



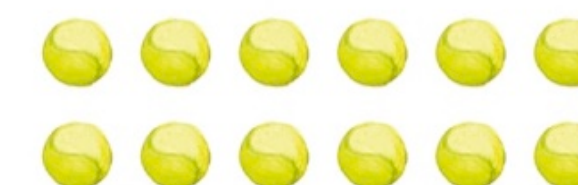
1. Dividera. Kontrollera division med multiplikation.



a. $\frac{8}{2} = \underline{4}$
 $\underline{4} \cdot \underline{2} = \underline{8}$



b. $\frac{6}{3} = \underline{\quad}$
 $\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{6}$



c. $\frac{12}{6} = \underline{\quad}$
 $\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$

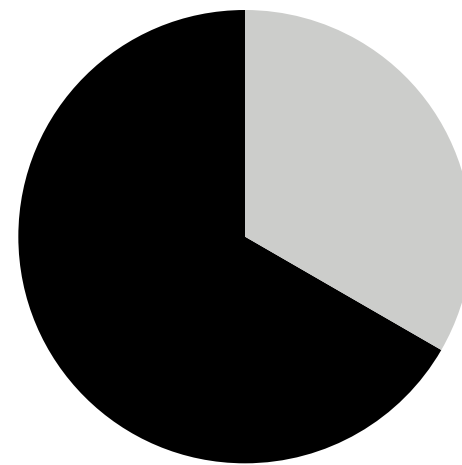
(Den grundläggande) matematikens epistemologi

$$\frac{a}{b}$$

Situation: Dela upp a saker i b väskor. Hur många i varje väska?

Division

Ikonisk representation:



Bråk (del av helhet)

Icke-ikonisk representation/relationer i symbolsystem: $\frac{a}{b}$ är ett tal c sådant att $b \cdot c = a$

(Den grundläggande) matematikens epistemologi

- Situationer - ikoniska representationer - relationer i symbolsystem
- Polysemi
- Den centrala konceptuella strukturen för hela tal
- The symbol grounding problem - hur får symboler sin mening?
- Symboler (ord, tecken) bär kulturella mening innan de får individuell mening (Vygotsky) och ett symboligenkänningsystem för siffror utvecklas tidigt i hjärnan.

Matematikinlärnings institutionella ramar

- I skolan har någon annan (varken lärare eller elev) bestämt vad som ska läras
- Skolmatematikframgång är starkt genetiskt betingad, utan speciella faktorer för matematiksvårigheter (men detta ska vi komma tillbaka till)
- Man lär sig nästan bara matematik i skolan, och skolmiljön är extremt restriktad
- För att lära sig matematik måste man kämpa med svåra saker
- Koncentrationsförmåga, grit, uthållighet, uppgiftsorientering
- Lärarrelationer, tillit, förtroende, osv är av största vikt

Brousseau, 1997
Kovas m fl, 2010
Garron-Carrier mfl., 2017
Sternen & Lundberg, 2009

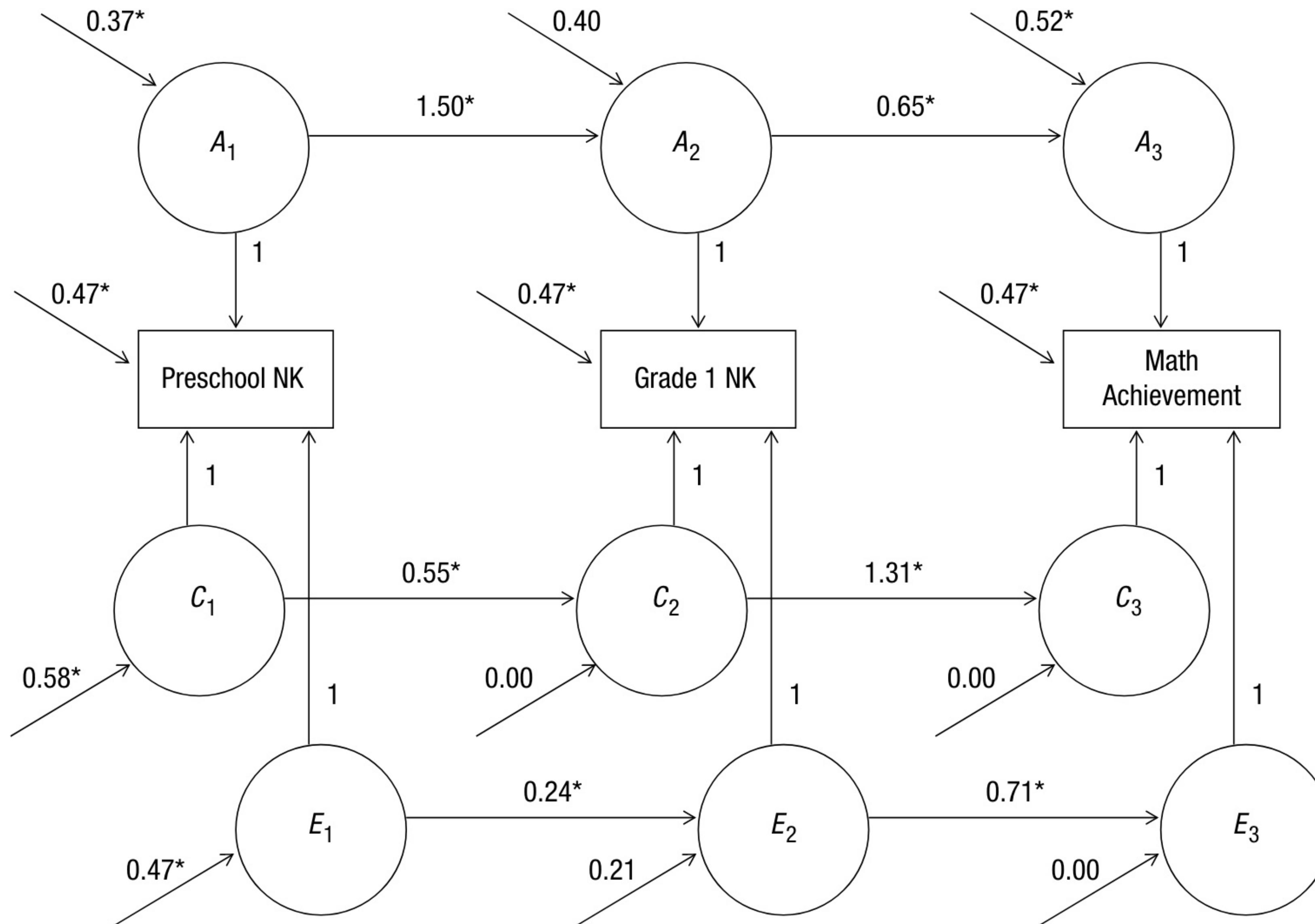
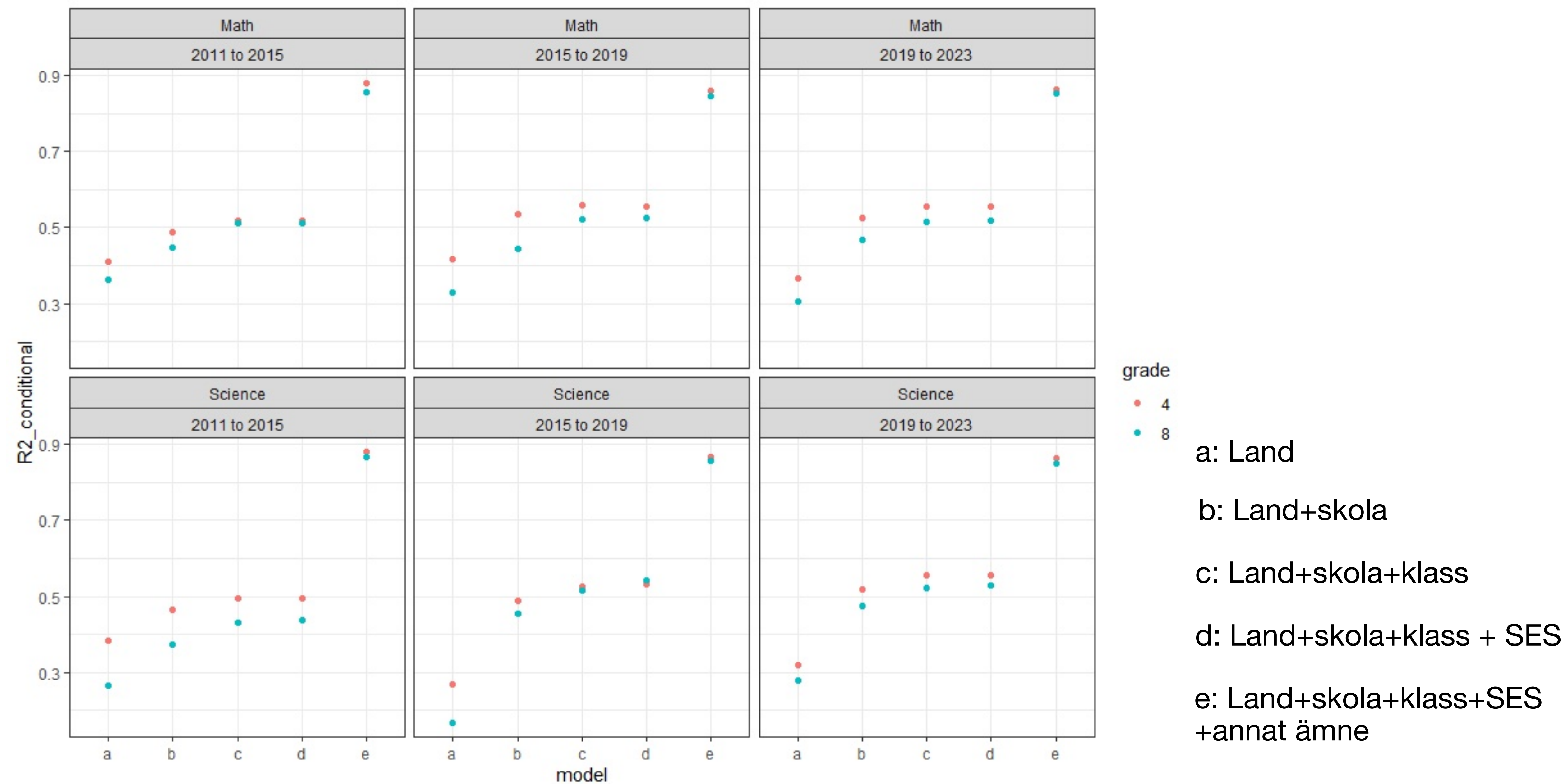


Fig. 2. Results of the simplex model: unstandardized estimates of transmission and innovation in the genetic (A), shared environmental (C), and nonshared environmental (E) contributions to preschool and Grade 1 number knowledge (NK) and to late-elementary math achievement (see Fig. 1 for an explanation of the model). Asterisks indicate significant values ($p < .05$).



Matematikkunnandets psykologi och kognition

- I allmänhet: - ett tydligt matematiknätverk som är i stort sett separerat från språkliga nätverk.
- I skolan: Motivation, kontroll, sociala förmågor
- Skolmatematiklärande involverar de typiska matematiknätverken, men också flera andra. Språkliga komponenter, Hippocampus. Visuospatiellt arbetsminne.
- Svårt att särskilja specifika kognitiva förmågor som hänger samman med matematiksvårigheter generellt...
- ...men man kan identifiera tydliga tidiga indikationer
(RAN, spatiella förmågor, g, räkneramsan)

Amalric & Dehaene, 2016, 2018
Chan & Wong, 2020
Zhang, Räsänen m fl, 2020
Peters & de Smedt, 2017

Dyskalkyli och specifika matematiksvårigheter

- Dåligt definierade begrepp som används olika av olika forskare
- Svag klinisk relevans, dvs svårt att utifrån en (formell eller informell) diagnos välja ut en specifik behandling (dvs en specifik undervisning)
- Responsen på olika träningsprogram är också differentierad (men möjligen på ett förutsägbart sätt)
- Det verkar inte finnas ett specifikt centrum där tal i olika representationsformer hanteras i hjärnan
- Det finns ett litet och relativt förutsägbart överlapp med dyslexi

Dyskalkyli och specifika matematiksvårigheter

- Det skulle möjligen vara relevant att särskilja "ren dyskalkyli" som en svaghet i antalsuppfattningen (till skillnad från t ex symbolhanteringsförmåga).
- Möjligen även svagt visuospatiellt arbetsminne, som verkar hänga samman med svårigheter att skapa aritmetiska minnen (tabellminnen) via "vanlig undervisning".
- Spatiella förmågor interagerar på ett komplext sätt med numeriska förmågor
- Icke-symbolisk men inte symbolisk magnitudrepresentation förklaras av domängenerella funktioner som VS-WM och g

Sammanfattning: kognitiva resurser:

- Språkliga (fonologirelaterade)
- Geometriska/Spatiala förmågor
- Antalsuppfattning
- Vs-wm och talfakta
- Symbolhantering

Imorgon: Hur borde man undervisa?

Referenser

- Ahl, L.M. & Helenius, O. (2021). Polysemy and the role of representations for progress in concept knowledge. MADIF12: the twelfth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, Växjö, January 14–15, 2020.
- Amalric, M., & Dehaene, S. (2016). Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(18), 4909-4917.
- Amalric, M., & Dehaene, S. (2018). Cortical circuits for mathematical knowledge: evidence for a major subdivision within the brain's semantic networks. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 373(1740), 20160515.
- Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational studies in mathematics*, 19(2), 179-191.
- Bulthé, J., De Smedt, B., & de Beeck, H. O. (2014). Format-dependent representations of symbolic and non-symbolic numbers in the human cortex as revealed by multi-voxel pattern analyses. *NeuroImage*, 87, 311-322.
- Case, R., & Okamoto (1996). The role of central conceptual structures in the development of children's thought. *Monographs of the society for research in child development* 61(1-2), 1–265.
- Cipora, K., Schroeder, P. A., Soltanlou, M., & Nuerk, H. C. (2018). More Space, Better Mathematics: Is Space a Powerful Tool or a Cornerstone for Understanding Arithmetic?. In *Visualizing Mathematics* (pp. 77-116). Springer, Cham.
- Garon-Carrier, G., Boivin, M., Kovas, Y., Feng, B., Brendgen, M., Vitaro, F., ... & Dionne, G. (2017). Persistent genetic and family-wide environmental contributions to early number knowledge and later achievement in mathematics. *Psychological Science*, 28(12), 1707-1718.
- Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.
- Hannagan, T., Amedi, A., Cohen, L., Dehaene-Lambertz, G., & Dehaene, S. (2015). Origins of the specialization for letters and numbers in ventral occipitotemporal cortex. *Trends in cognitive sciences*, 19(7), 374-382.
- Helenius, O. & Ahl, L. M. (accepted). The case against coherence in mathematics instruction. TSG 5. ICME 14, July 12-19, 2020, Shanghai, China.
- Kohn, J., Rauscher, L., Kucian, K., Käser, T., Wyschkon, A., Esser, G., & Von Aster, M. (2020). Efficacy of a computer-based learning program in children with developmental dyscalculia. What influences individual responsiveness?. *Frontiers in Psychology*, 11.
- Kovas, Y., Haworth, C. M., Petrill, S. A., & Plomin, R. (2007). Mathematical ability of 10-year-old boys and girls: genetic and environmental etiology of typical and low performance. *Journal of Learning Disabilities*, 40(6), 554-567.
- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition*, 93(2), 99-125.
- Landsmann, L. T., & Karmiloff-Smith, A. (1992). Children's understanding of notations as domains of knowledge versus referential-communicative tools. *Cognitive development*, 7(3), 287-300.
- Leibovich, T., & Ansari, D. (2016). The symbol-grounding problem in numerical cognition: a review of theory, evidence, and outstanding questions. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 70(1), 12.
- Lundberg, I., & Sterner, G. (2009). Dyskalkyli–finns det. *Aktuell forskning om*.
- Nemmi, F., Helander, E., Helenius, O., Almeida, R., Hassler, M., Räsänen, P., & Klingberg, T. (2016). Behavior and neuroimaging at baseline predict individual response to combined mathematical and working memory training in children. *Developmental cognitive neuroscience*, 20, 43-51.
- Rubinsten, O., & Henik, A. (2006). Double dissociation of functions in developmental dyslexia and dyscalculia. *Journal of Educational Psychology*, 98(4), 854.
- Zhang, X., Räsänen, P., Koponen, T., Aunola, K., Lerkkanen, M. K., & Nurmi, J. E. (2020). Early cognitive precursors of children's mathematics learning disability and persistent low achievement: A 5-year longitudinal study. *Child development*, 91(1), 7-27.