

# Överbygga matematiska kunskapsluckor

*strategier som stödjer elever att komma ikapp och överbygga  
matematiksvårigheter*

Konferens matematiksvårigheter 2022



VÄSTERÅS STAD

# Föreläsare



**Bodil Lövgren**

Skolutvecklare &  
processledare, Enheten för  
forskning och skolutveckling

[bodil.lovgren@vasteras.se](mailto:bodil.lovgren@vasteras.se)



**Martina Kulläng**

Förstelärare och speciallärare i  
matematik 7-9

Pettersbergsskolan

[martina.kulläng@vasteras.se](mailto:martina.kulläng@vasteras.se)



# Vad ska vi prata om idag?

- **Undervisning för framgång**
  - Lektionsstruktur och nyckelstrategier
  - Fyra faser
  - Time on task
- **Response to intervention**
  - Screening och analys
  - Helklassundervisning
  - Gruppundervisning
    - Hands-on-exempel på intensivundervisning om rationella tal
    - Särskilt stöd - ominläring
    - Enskild undervisning - för vem?
    - Motivation och kompensatoriska hjälpmedel



# Frågor

Under föreläsningen har du möjlighet att skicka in frågor digitalt.

- Gå till på [slido.com/kompetento](https://www.slido.com/kompetento)
- Gilla andras frågor som du tycker är intressanta för större chans att de tas upp och blir besvarade.

Chans till svar på frågor kommer på slutet.



Planering och genomförande av en lektion

# UNDERVISNING FÖR FRAMGÅNG



# Problemlösningsektion

## 5 PRAKTIKER FÖR MATEMATIK GENOM PROBLEMLÖSNING

### 6. Formativa nyckelstrategier:

1. Tydliggöra och dela avsikten med lärandet och kriterier för framgång
2. Skapa effektiva klassrumsdiskussioner, aktiviteter och lärandesituationer som frambringar bevis på lärande
3. Ge återkoppling som för lärandet framåt
4. Aktivera elever som resurs för varandra i lärandet
5. Aktivera elever som ägare av sitt eget lärande
6. Reflektera över dina insatser och justera din planering

### Analoga och digitala tekniker för formativa strategier

### Lärare ställer frågor:

1. Samla information, hitta en metod, leda elever genom en metod
2. Använda terminologi
3. Utforska matematiska betydelser och samband
4. Få elever att förklara sina tankar
5. Skapa diskussion
6. Koppla och tillämpa
7. Utvidga tänkandet
8. Rikta och fokusera
9. Bilda sammanhang

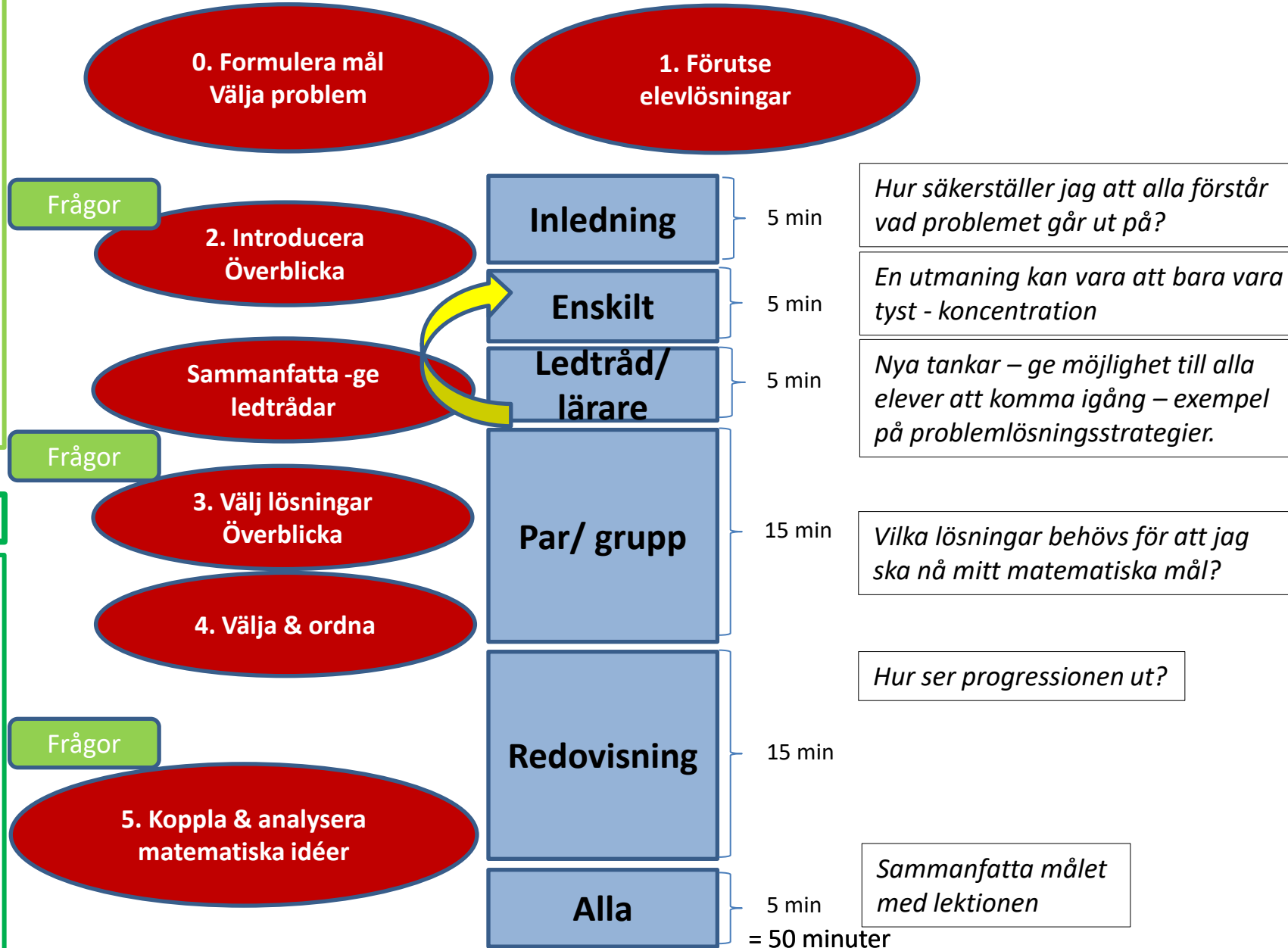
### Undervisningstaktiker

### Läraren ber eleven:

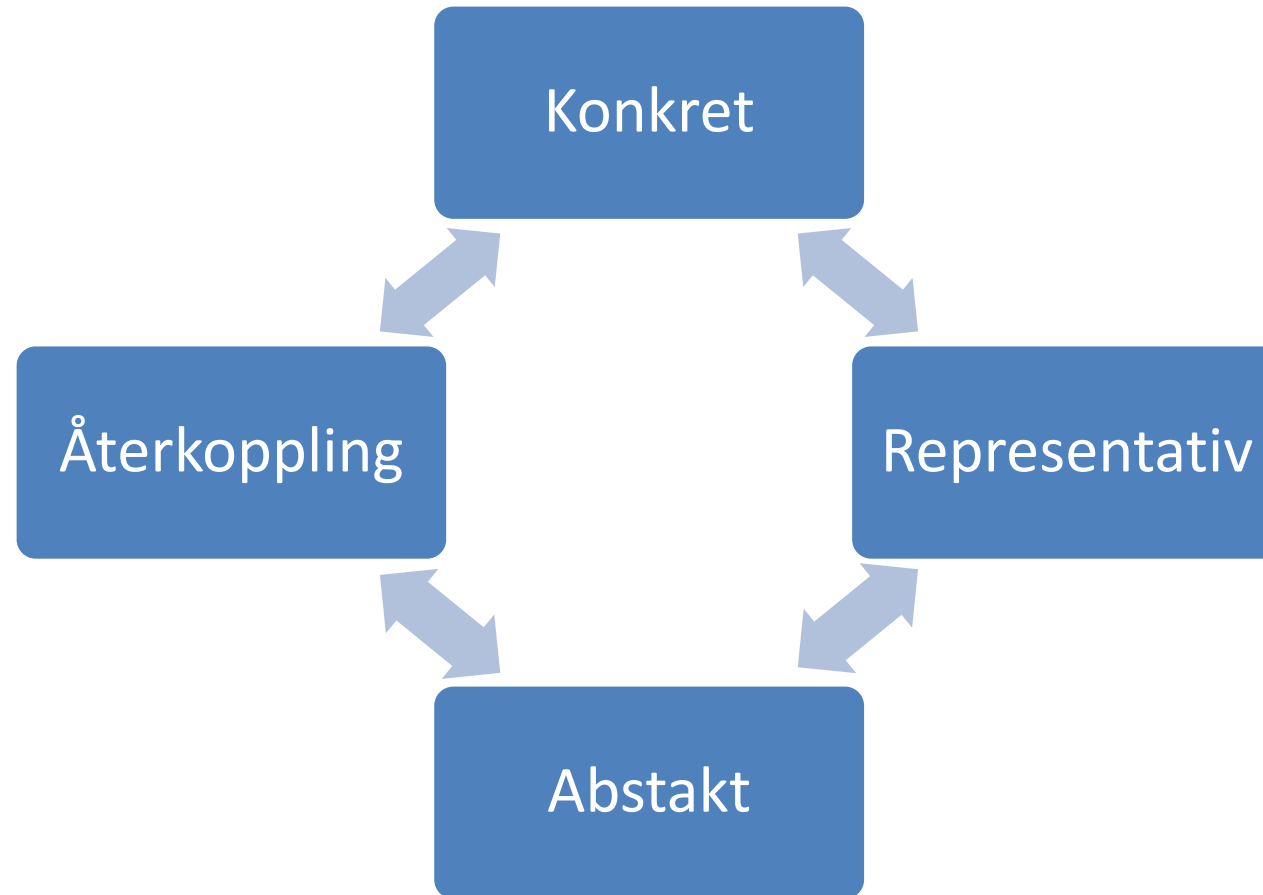
1. Tänka tyst
2. Beskriva
3. Återberätta
4. Resonera
5. Lägga till
6. Ändra uppfattning
7. Prata parvis

### Läraren kan:

1. Återge
2. Utmana
3. Ifrågasätta



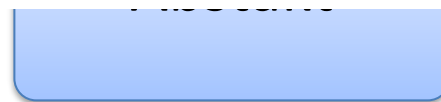
# Undervisningens 4 faser



# Undervisningens 4 faser

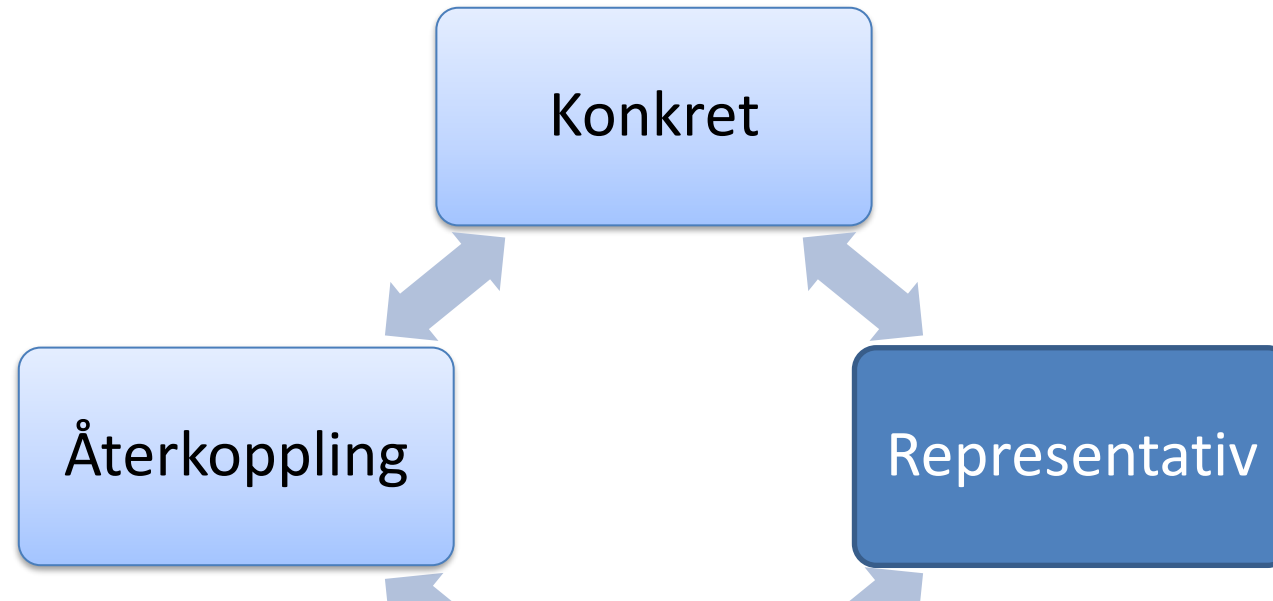


- Muntligt introducera matematiska begrepp och idéer med konkret material
- Undersöka och lösa muntliga matematiska uppgifter och problem med stöd av lärare



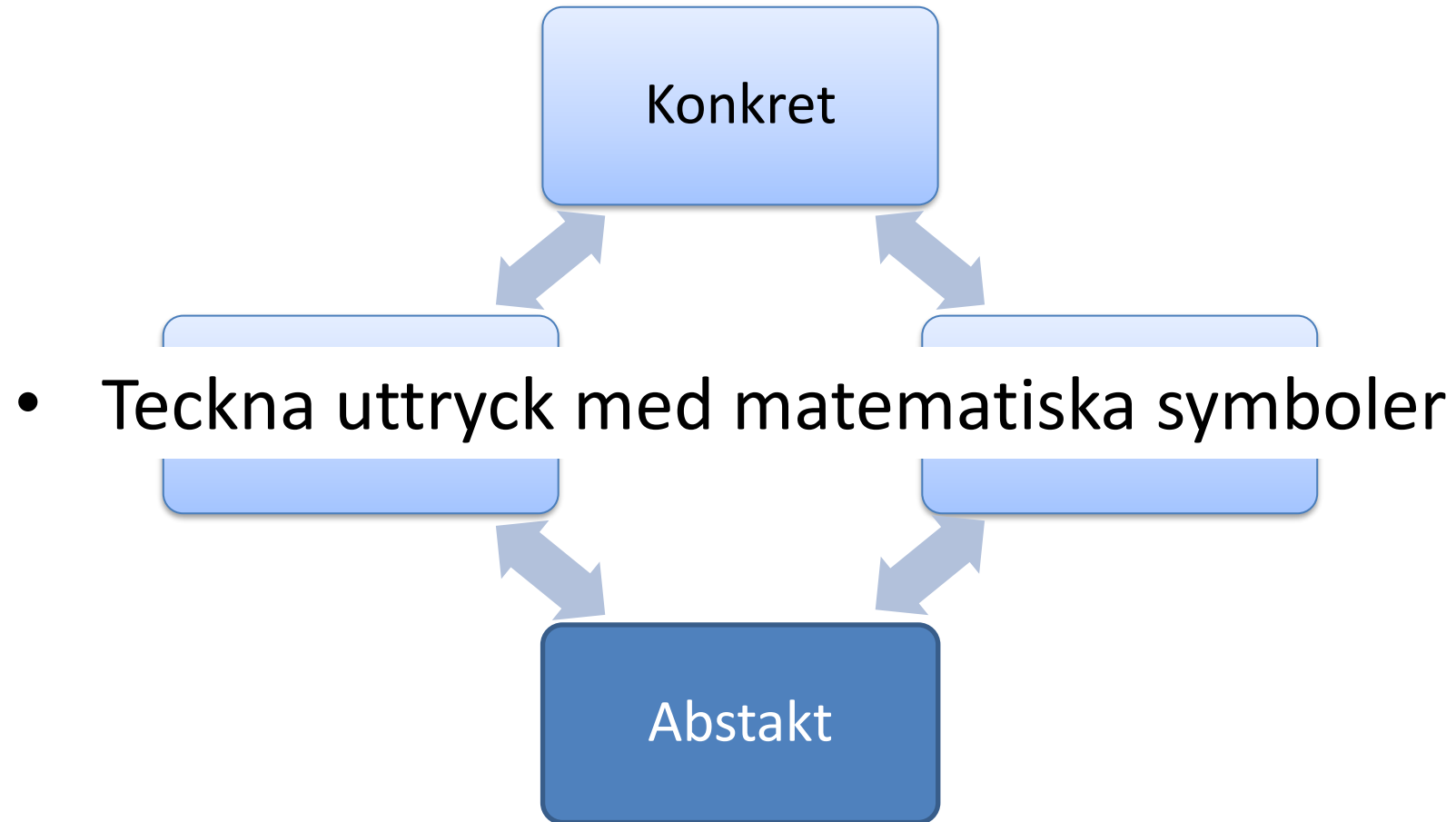


# Undervisningens 4 faser

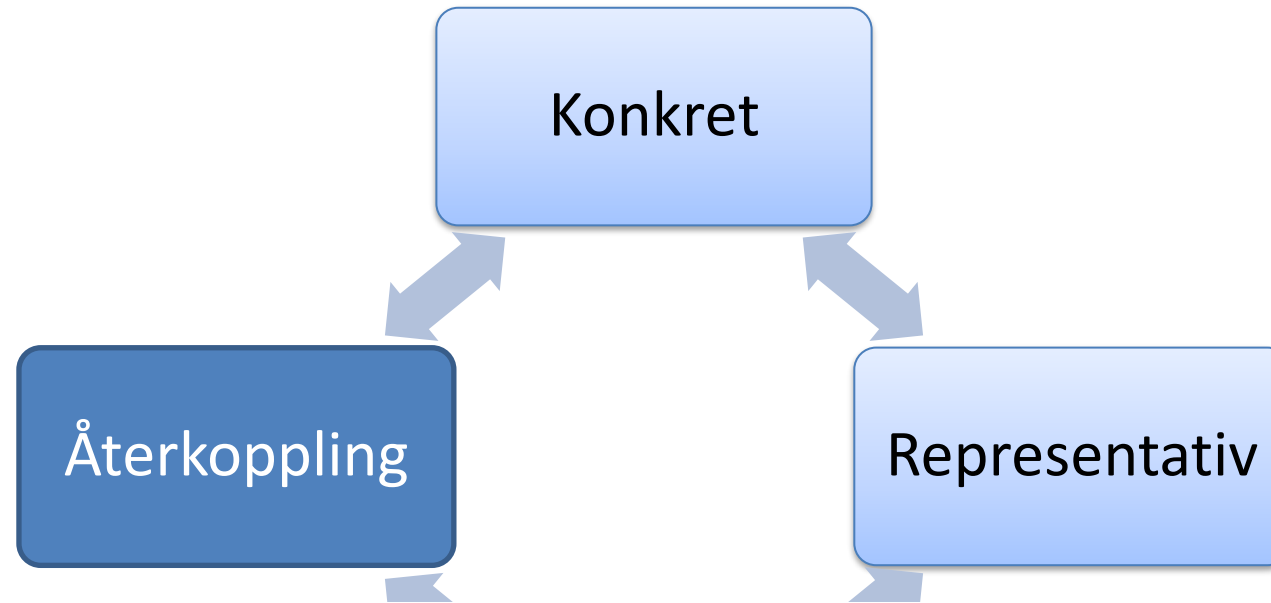


- Arbeta med representationer av matematiska begrepp och använda matematiska resonemang tillsammans med lärare

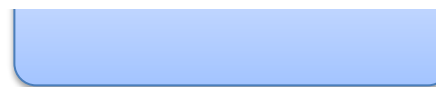
# Undervisningens 4 faser



# Undervisningens 4 faser



- Befästa begrepp och samband mellan olika matematiska begrepp



# Några viktiga begrepp



- **Time on task** – tid för uppgiften  
Vad kan du göra?
  - Träna på tidseffektiva växlingar av lektionens faser
  - Ögonen på tavlan
- **Självreglerat lärande:**  
planera - genomföra – reflektera (metakognition)  
Vad kan du göra?
  - Leda
  - Stimulera

# RESPONS TO INTERVENTION



# Response to Intervention (RTI)

helklass



grupp



en-till-en

- Utveckla och anpassa undervisningen så att gruppen får en undervisning av god kvalitet
- Screening med taluppfattningstest för att upptäcka elever i riskzon
- Elever med kunskapsluckor erbjuds **intensivundervisning** i grupp
- Intensivundervisningen bör handla om ... för åk 1-5 och rationella tal för åk 5-9
- Särskilt stöd i grupp
- Elever som fortfarande har kunskapsluckor erbjuds **intensivundervisning** en-till-en
- Särskilt stöd av speciallärare



# Response to Intervention (RTI)

## helklass

- Utveckla och anpassa undervisningen så att gruppen får en undervisning av god kvalitet
- Screening med taluppfattningstest för att upptäcka elever i riskzon

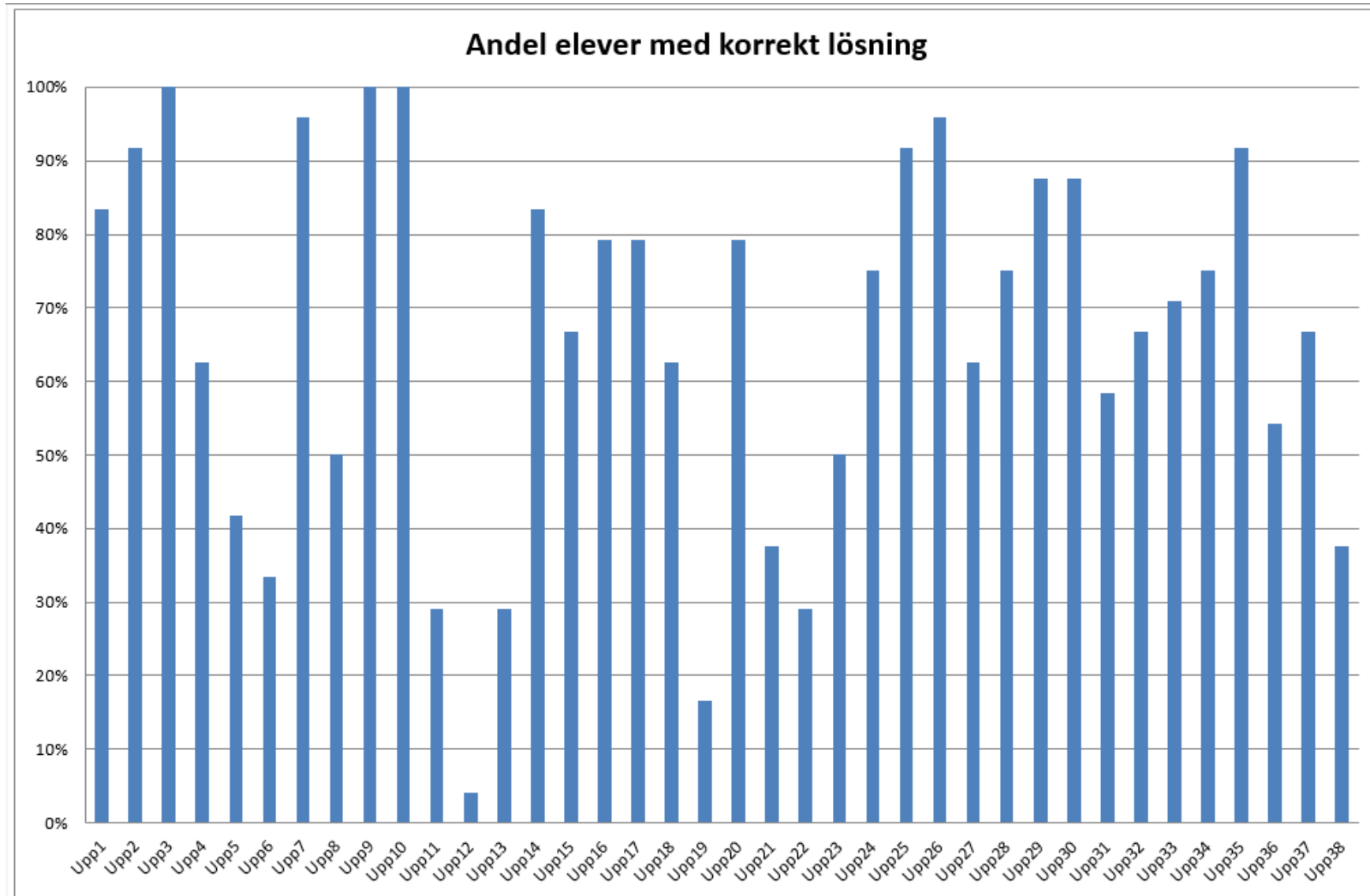


# Taluppfattning: testresultat - individnivå

Upp1	Upp2	Upp3	Upp4	Upp5	Upp6	Upp7	Upp8	Upp9	Upp10	Upp11	Upp12	Upp13	Upp14	Upp15	Upp16	Upp17	Upp18	Upp19	Upp20	Upp21	Upp22	Upp23	Upp24	Upp25	Upp26	Upp27	Upp28	Upp29	Upp30	Upp31	Upp32	Upp33	Upp34	Upp35	Upp36	Upp37	Upp38		
1	1	1				1	1	1	1				1		1	1	1		1			1		1	1		1	1	1	1	1		1	1	1				
1	1	1	1	1		1		1	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1		1	1			1	1			1	1	1	1	1			1			1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1				
1	1	1				1	1	1	1	1			1				1		1				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
1	1	1	1			1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1		1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1		1		1		1	1							1	1						1	1	1					1			1		1				
1	1	1			1	1		1	1				1	1	1	1	1			1			1		1										1				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1		1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1			1		1	1				1	1	1	1	1		1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1				1	1	1	1				1	1	1	1	1							1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1				1		1	1	1		1	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1				1		1	1															1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	1	1		1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1			1		1	1	1			1		1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



# Taluppfattning: testresultat - klassnivå



# Deborah Ball, Dean of the University of Michigan's School of Education (2014)

## The Work of Teaching

<https://www.youtube.com/watch?v=nrwDM4ejNqs&t=34s>



# Helklass

- Hitta gemensamma svårigheter
- Avlasta arbetsminnet
- Om att variera vid rätt tillfällen
  - Låt alla variabler vara konstanta utom den regel/metod/mönster som du vill att eleverna ska se
  - Men utsätt eleven för en variation av exempel och icke-exempel vid begreppsinsläring
- Var nyfiken o lyhörd var eleverna befinner sig



# Långtidsminnet



- Koda in
  - avlasta arbetsminnet
  - förebygg missförstånd
- Lagra
  - repetera

# Långtidsminnet



ers



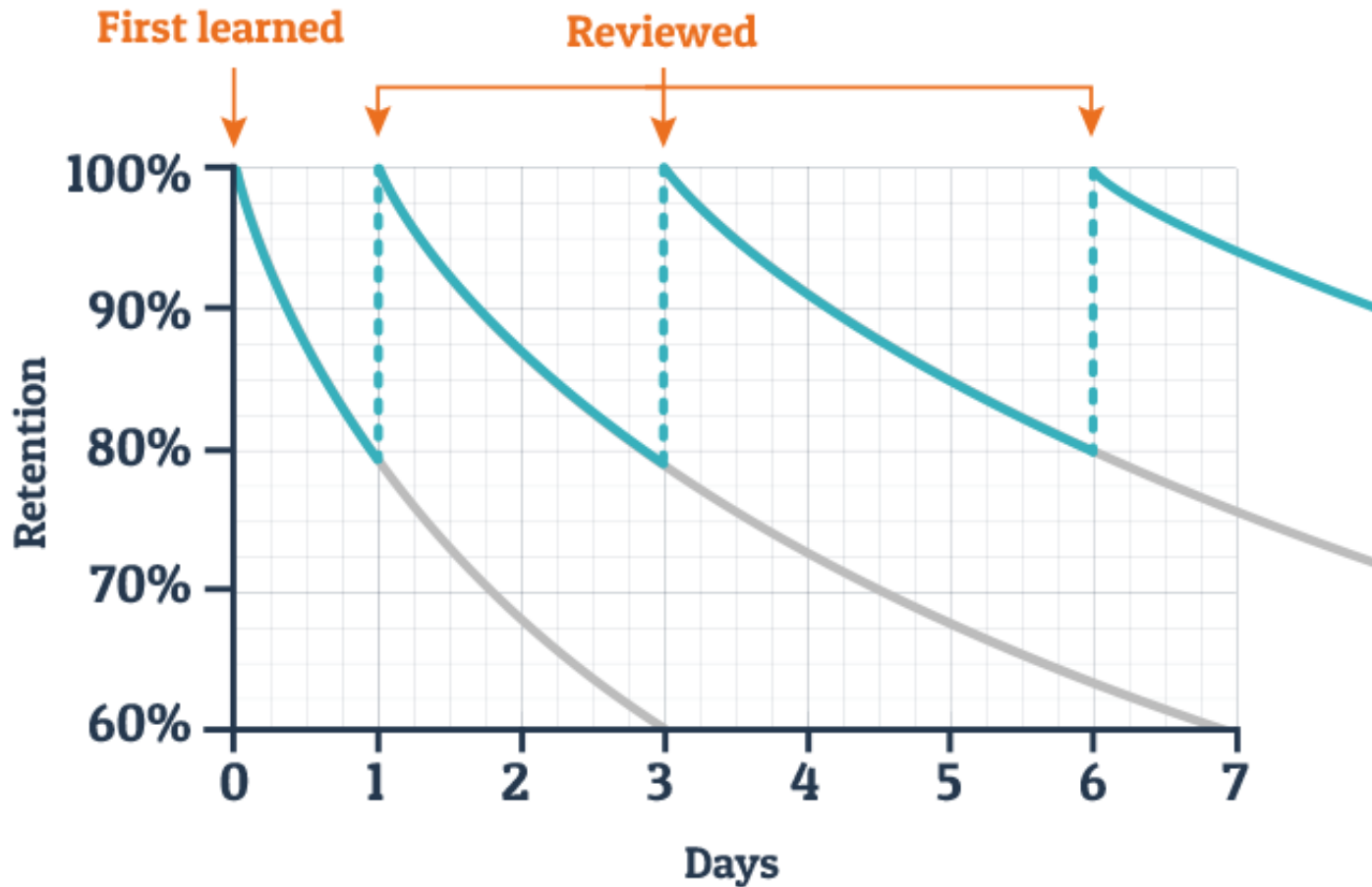
# Långtidsminnet



- Koda in
  - avlasta arbetsminnet
  - förebygg missförstånd
- Lagra
  - repetera
  - glömskekurva

# Långtidsminnet

## Typical Forgetting Curve for Newly Learned Information



# Långtidsminnet



- Koda in
  - avlasta arbetsminnet
  - förebygg missförstånd
- Lagra
  - repetera
  - glömskekurva
- Framplockning av information ur långtidsminnet
  - frågesport, starters



# Specialfall – hela klassen har F (nästan)

- Vad gör vi?
  - I år 7 screenade, kartlade och försökte anpassa undervisningen
    - Längre tid i varje moment
    - Speciallärare i klassrummet
    - Backade och försökte ta in mer praktiskt material
    - Försökte ändå nå upp till nivån i år 7
    - Utvärdering: fortfarande alla F
  - I år 8
    - Ominläring med anpassat läromedel
    - Fånga upp kunskapsluckor och lägg till aktiviteter/undervisning
    - Speciallärare i klassrummet på 3 av 4 lektioner



# Response to Intervention (RTI)

helklass



grupp

- Utveckla och anpassa undervisningen så att gruppen får en undervisning av god kvalitet
  - Screening med taluppfattningstest för att upptäcka elever i riskzon
- 
- Elever med kunskapsluckor erbjuds **intensivundervisning** i grupp
  - Intensivundervisningen bör handla om rationella tal för åk 5-9
  - Särskilt stöd i grupp



# Forskning bakom intensivundervisningen



- Fletcher & Vaughn, 2009 – Respons to intervention (RTI)
- Gersten et al., 2009 – genomförandet av RTI
- Bryant et al., 2016 – en-till-en undervisning
- Pellegrini et al., 2018 – en-till-få och en-till-en
  
- Hattie effektstorlek på RTI: 1,07
  
- Metaanalys över effektiva undervisningsmetoder
  - Explicit undervisning
  - Multipla strategier
  - Sekvens av uppgifter
  - Verbalisering
  - Representationer

# Intensivundervisning



Det här fotot av Okänd författare licensieras enligt CC BY-ND

- 4 tillfällen/vecka i 10 veckor
  - 20 min för 1-3
  - 30 min för 4-6
  - 40 min för 7-9
- Kvalificerad matematiklärare
- Täppa till kunskapsluckor
- Förundervisning

# Schema intensivundervisning

	<b>Måndag</b>	<b>Tisdag</b>	<b>Onsdag</b>	<b>Torsdag</b>	<b>Fredag</b>
8.00 - 8.30					
10.00 - 10.30					

<b>Årskurs</b>	<b>Måndag</b>	<b>Tisdag</b>	<b>Onsdag</b>	<b>Torsdag</b>	<b>Fredag</b>
<b>1-3</b>	12-12:30	12-12:30		12-12:30	12-12:30
<b>4-6</b>	12:30-13	12:30-13		12:30-13	12:30-13



# Vem behöver intensivundervisning?

- Elev med kunskapsluckor
- Elev med bra betyg i de flesta ämnen, men låga prestationer i matematik
- Elev som behöver förkunskaper inför ett arbetsområde i klassen
- Elev med låga resultat på screening och som tillsammans med matematikläraren bedöms aktuell för intensivundervisning
  - Om eleven har andra mer generella inlärningssvårigheter behöver elevens behov av särskilt stöd utredas
  - Eleven behöver inse behovet av stöd och vara motiverad att göra något åt det



Det här fotot av Okänd författare licensieras enligt CC BY-SA



# HANDS-ON INTENSIVUNDERVISNING OM TAL I BRÅKFORM





Rationella tal

## Exemplet bråk

- Kommer åt grundläggande förståelse för rationella tal på ett konkret sätt
- En grundläggande byggsten som sedan går att bygga ut till förståelse för tal i decimal- och procentform
- Bygger också förståelse för delningsdivision och innehållsdivision om läraren använder det så





# Begrepp och metoder

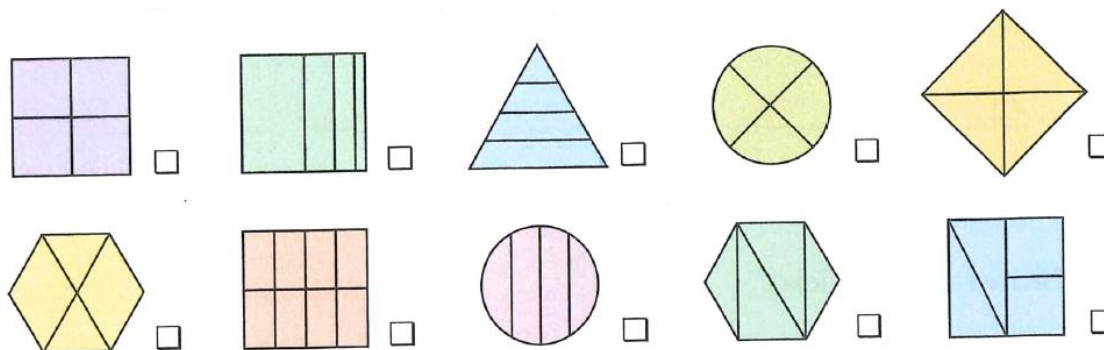
- Täljare och nämnare
- Bråk som del av helhet, antal och värde på tallinjen
- Bråkform och blandad form
- Jämföra bråk
- Addition och subtraktion av bråk
- Multiplikation av ett bråk



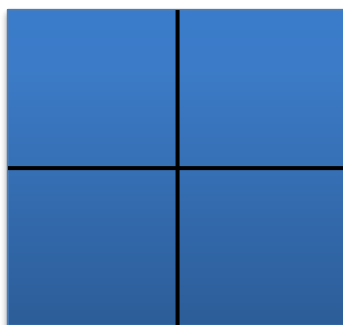
Konkret material för tal  
i bråkform

# Del av helhet

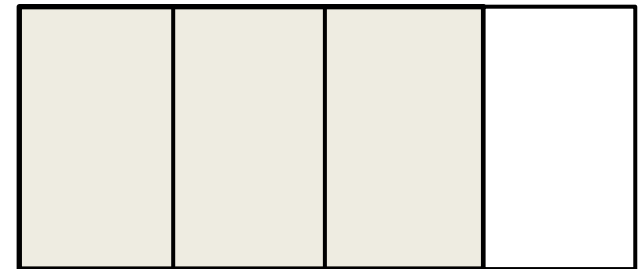
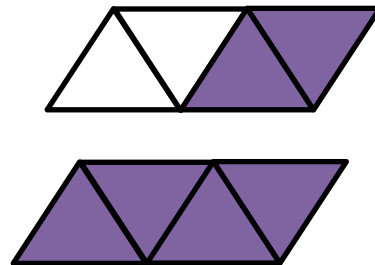
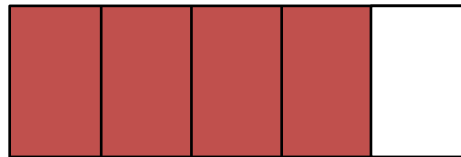
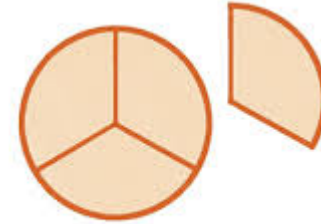
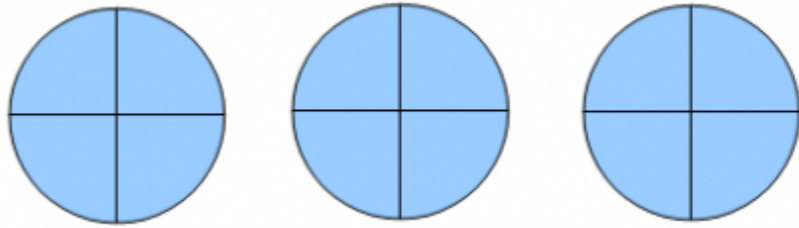
Vilka av figurerna är delade i fjärdedelar? Sätt kryss



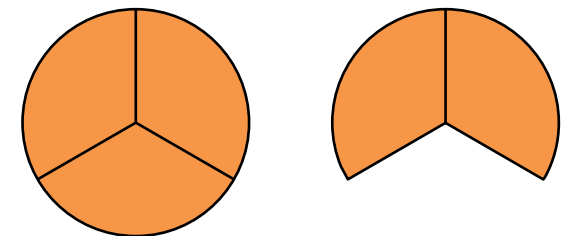
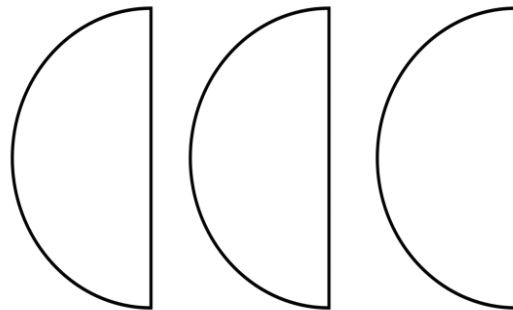
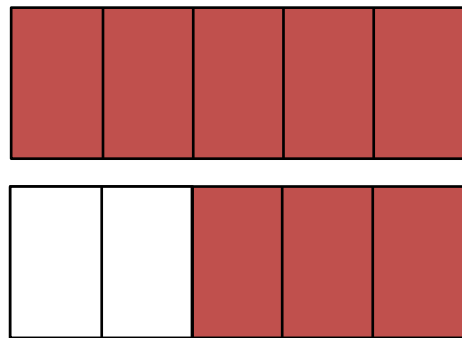
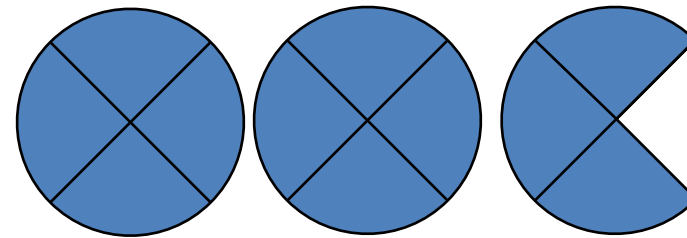
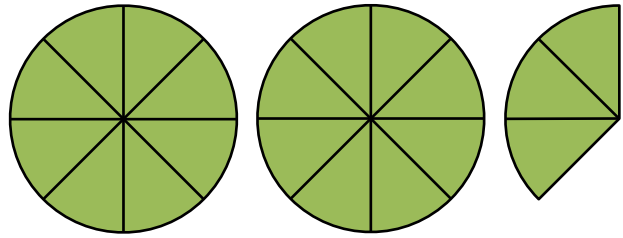
Av författaren godkänd bild att använda i denna presentation på Matematikbiennalen 2022



# Vilka bilder visar nämnaren 4?

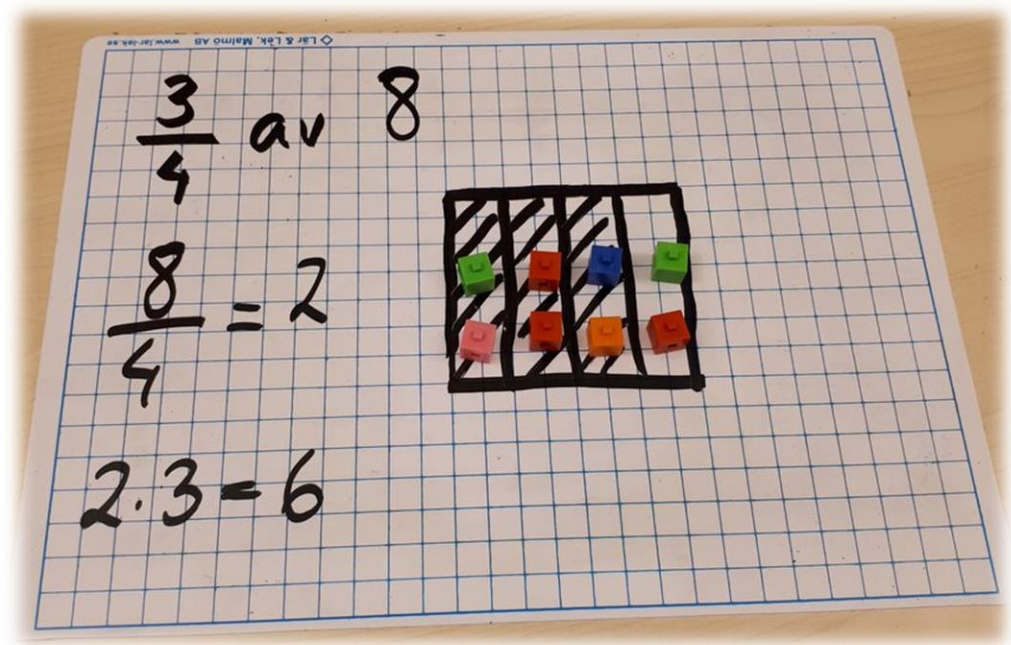


# Vad kallas nämnaren?



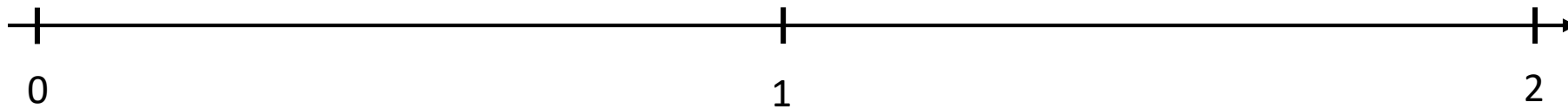
# Del av antal

- Svårt moment trots att vi börjar med stambråk



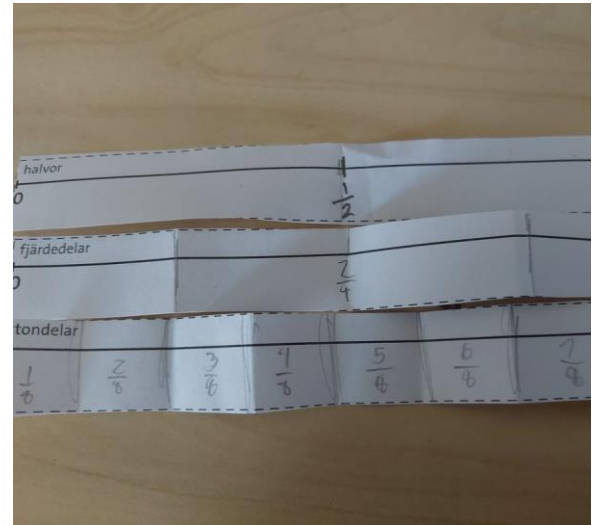
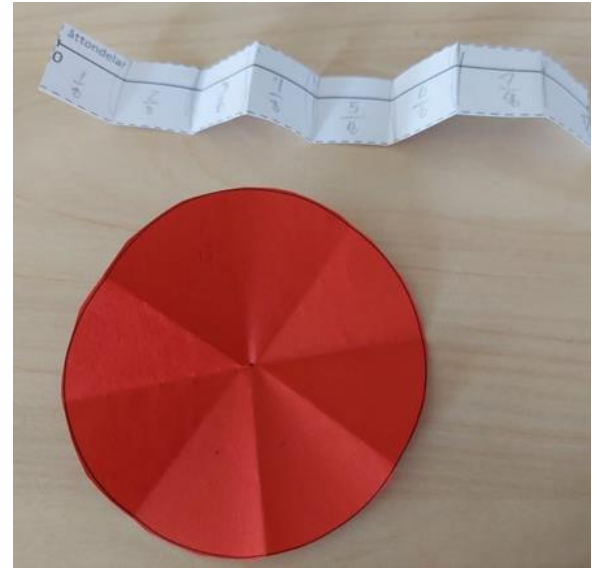
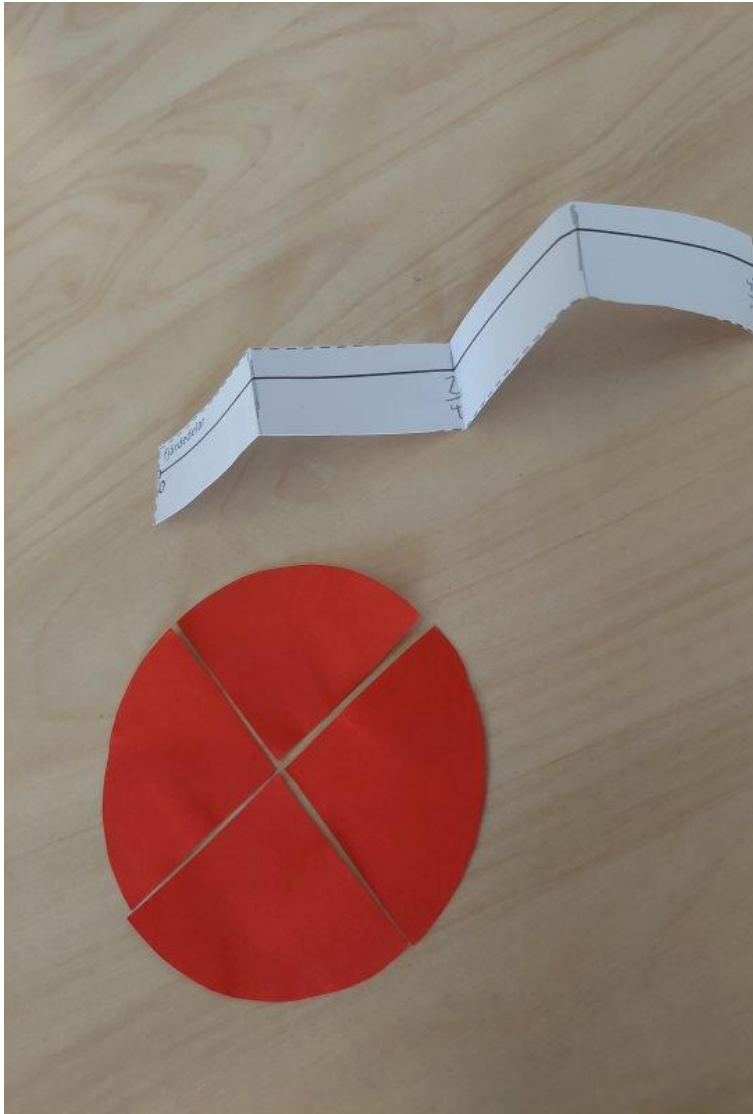
# Bråk som värde på tallinjen

Placera  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{5}{3}$  och  $1\frac{3}{4}$  på tallinjen

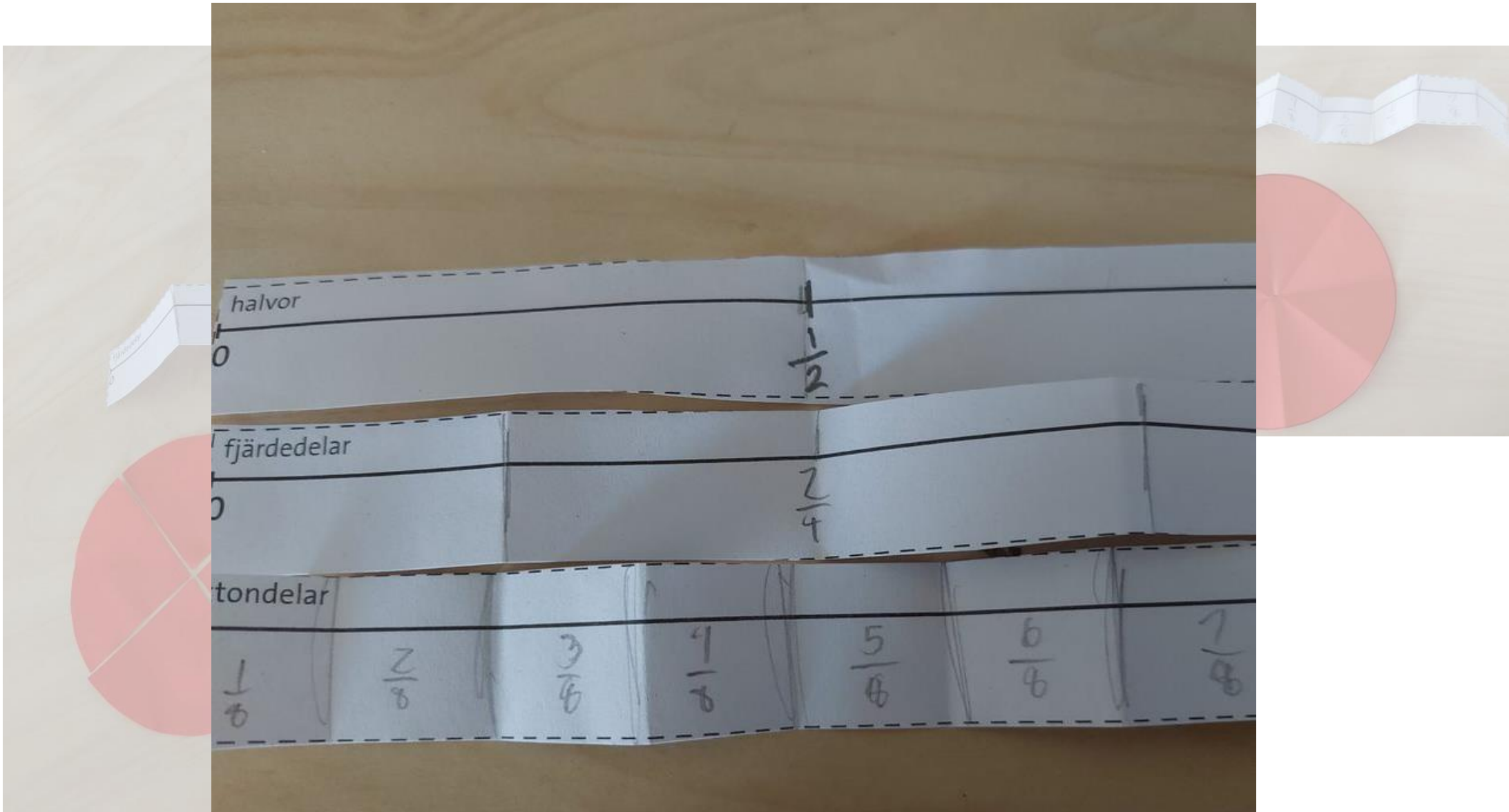


Hur tar jag reda på  
nämnaren på tallinjen?

Mycket abstrakt uppgift









# Bygg ut med närliggande områden som bygger på liknande grundläggande strukturer

## Del av antal

- Proportionalitet. Om 5 äpplen kostar 15 kr, hur mycket kostar då 8 äpplen?
- Om 4% är 16 kr. Hur mycket är 100%?

## Del av antal

- Förståelse för när man ska välja att använda division och multiplikation

## Bråk som ett tal på tallinjen

- Motsvarande tal i decimal- och procentform



# Erfarenhet från andra områden i intensivundervisning

## Åk 1-6

- Taluppfattning 0-100
- Räknemetoder utan övergångar
- Textuppgifter (alla räknesätt)
- Likhetstecknets betydelse
- Tallinjen
- Rationella tal
  - Tal i bråkform

## Åk 7-9

- Rationella tal
  - Tal i bråkform
  - Tal i decimalform
- Algebra



Progression – formativt tänk – täcka luckor

# Erfarenheter av intensivundervisning

- Information till och nära kontakt med vårdnadshavare
- Se till att det finns med i elevens schema och som en extra anpassning i skolans lärplattform
- Jobba med elevens självförtroende och tilltro till sin förmåga – aktuella elever har ofta ett utpräglat flyktbeteende



# Utvärdering av intensivundervisning

■■■■ deltar i intensivmatte 3 dagar i veckan under en period. Vi jobbar med arbetsområde bråk.

Utvärdering: ■■■■ lär sig och förstår det mesta i stunden, men behöver ta hjälp av strategier som att rita och behöver ibland stöd av att läraren ställer metakognitiva frågor för att kunna hämta kunskapen från långtidsminnet.

■■■■ har visat att han kan:

- Bråk som en del av helhet, när det är lika stora delar.
- Del av antal, men behöver rita för att förstå hur han ska räkna.
- Bråk som ett tal på tallinjen, om han får stödfrågan "hur vet man vad nämnaren är?"
- Räkna med bråk med lika nämnare

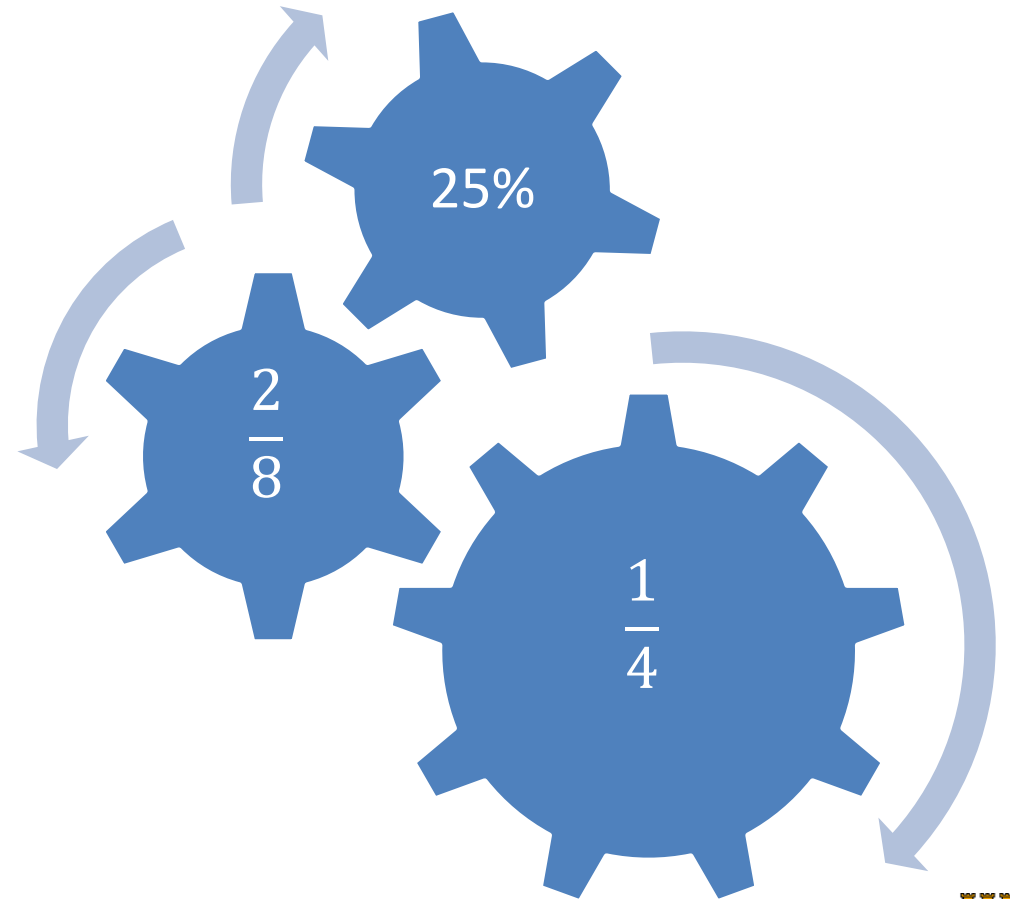
■■■■ behöver träna mer på:

- Bråk som en del av helhet när delarna är olika stora. Går det att rita i figuren så att bitarna blir lika stora?
- Blandad form och bråkform, gör rätt ibland och fel ibland.
- Bråk som ett tal på tallinjen när bråk med olika nämnare ska placeras på samma tallinje.
- Storleksordna bråktal



# Effekter av intensivundervisning

- **Mer kunskaper inom området**
- Ökad aktivitet på vanliga mattektioner
- Börjar koppla samman matematiken, förstår t.ex. att bråk är nästan samma sak som procent...
- Förbättrat självförtroende i matematik, vilket ger förbättrade resultat i matematik generellt.



# SÄRSKILT STÖD



# Frågesport och checklista

## Frågesport summit

- Räkna ut
1. a) summan av 9 och 3  
b) kvoten av 9 och 3
  2. Vilket värde har siffran 9 i talet  
a. 30 900  
b. 19  
c. 9 325 744

v. 35 Utan miniräknare

Säkerhet (1-10)

Så här tänkte jag:

3. Avrunda  
a. 35 369 till tiotal  
b. 39 901 till tusental

Så här tänkte jag:

## Frågesport summit 4

1. a) 27 b) 6
2. a) 900 b) 9
3. a. 35 370

**FACIT v. 35** Utan miniräknare

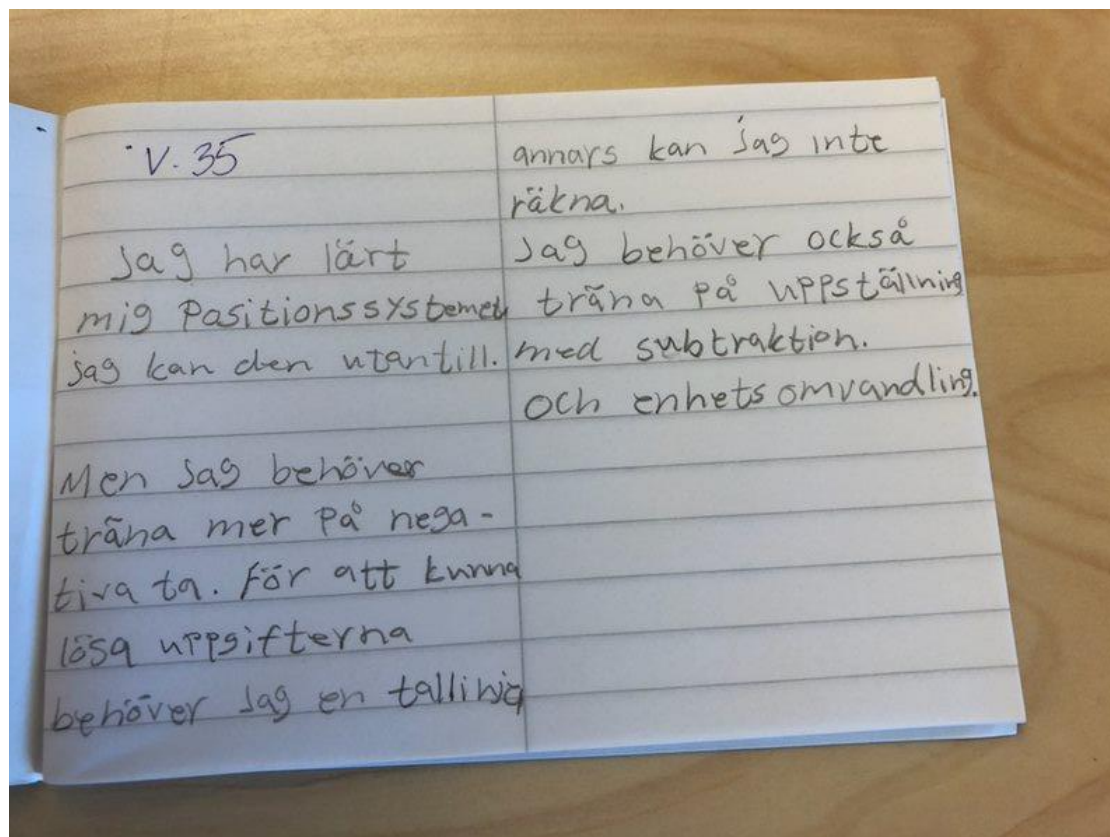
c) 9 000 000

## Checklista kap 1 "Heltal"

- Storleksordna tal och sätta ut dem på en tallinje
- Avrunda tal
- Begreppen på de fyra räknesätten
- Multiplikation och division med 10, 100, 1000
- Uppställning på de 4 räknesätten
  - Addition
  - Subtraktion
  - Multiplikation
  - Division
- Prioriteringsreglerna
- Storleksordna negativa tal
- Addition och subtraktion med negativa tal
- Multiplikation och division av negativa tal



# Reflektionsbok och starter



## Starter

1. Vilket värde har 2 i talet

a) 1 208

b) 204 388

2. a) Skriv talet 6 tiotusental, 3 hundratal och 5 ental med siffror

b) Skriv talet 47 hundratal med siffror

c) Skriv talet 32 tiotal med siffror

3. Beräkna

a)  $47 \cdot 100 =$

b)  $32 \cdot 10 =$

c)  $\frac{5300}{100} =$

4. Avrunda 49 684 till

a) tiotal

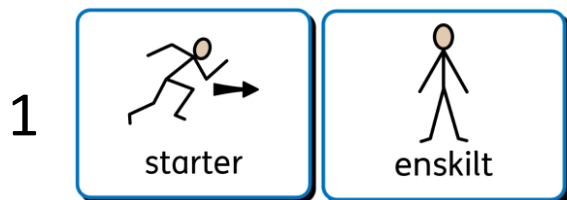
b) hundratal

c) tusental

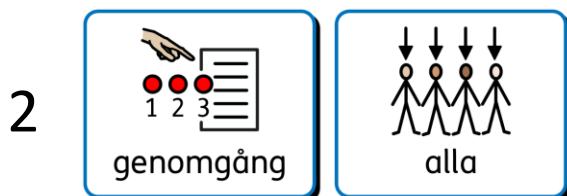




# Bild på lektionsstruktur



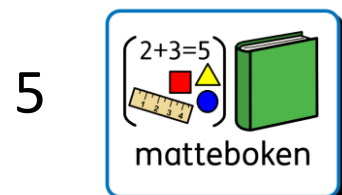
7 min



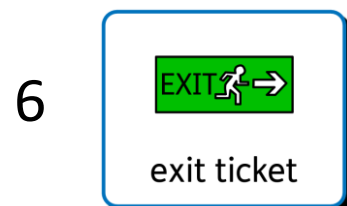
5 - 10 min

3 Frågesport - enskilt 20 min

4 Rätta och fyll i checklistan 5 min



10 min



Skriv i reflektionsboken:

- Vad har du lärt dig?
- Vad behöver du träna mer på?



[Det här fotot](#) av Okänd författare licensieras enligt [CC BY-SA-NC](#)

# Begreppsbok

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$  förkorta så långt det går

Förlänga

$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$

Addition och subtraktion av bråk

① Är nämnarna lika?

Nej ↙ ↘ Ja → räkna

↓

② Kan jag få lika nämnare om jag förlänger ett av bråken?

Ja ↙ ↘ Nej

↓ ↘ ↙

förläng bråket  
↓  
räkna

hitta gemensam nämnare  
↓  
förläng båda bråken  
↓  
räkna

Multiplikation av bråk

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$

Multipluera täljaren för sig och nämnaren för sig

$6 \cdot \frac{1}{3}$  skriv 6 som  $\frac{6}{1}$

$\frac{6}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6 \cdot 1}{1 \cdot 3} = \frac{6}{3} = 2$

Procentform, decimalform, bråkform

$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$	$\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$
$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$	$\frac{1}{3} \approx 0,33 = 33\%$
$\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$	$\frac{2}{3} \approx 0,67 = 67\%$
$\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$	
$\frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$	

Andelarna 50%, 25%, 20% och 10%

Välj utdelningen som andelar eller. Exempel är det här som brukar kallas utdelning i bråkform, decimalform och procentform.

En halv (hälften) $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$	En fjärdedel $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$	En femtedel $\frac{1}{5} = 0,20 = 20\%$	En tiondel $\frac{1}{10} = 0,10 = 10\%$
---	---	--	--

Exempel  
Hur många procent av figuren är färgad?  
Figuren är indelad i tiondelar:  $\frac{2}{10} = 20\%$   
Åtta tiondelar är färgade:  $\frac{8}{10} = 8 \cdot \frac{1}{10} = 8 \cdot 10\% = 80\%$   
80% av figuren är färgad.

$\frac{1}{4}$  25% andelen

●●●●  
det hela

●●●●  
delen



# ”Matte är inte för mig....”

- Motivation
  - Prestation leder till motivation
  - Rimliga mål, som nås
  - Kontroll
  - Självförtroende
- Kompensatoriska hjälpmedel
  - Miniräknare
  - Begreppsbok med bildstöd
  - Flödesschema
  - Lathundar
  - Konkret material



Det här fotot av Okänd författare licensieras enligt CC BY-ND



VÄSTERÅS STAD

# Response to Intervention (RTI)

helklass



grupp



en-till-en

- Utveckla och anpassa undervisningen så att gruppen får en undervisning av god kvalitet
- Screening med taluppfattningstest för att upptäcka elever i riskzon
- Elever med kunskapsluckor erbjuds **intensivundervisning** i grupp
- Intensivundervisningen bör handla om rationella tal för åk 5-9
- Särskilt stöd i grupp
- Elever som fortfarande har kunskapsluckor erbjuds **intensivundervisning** en-till-en
- Särskilt stöd av speciallärare



# Vanliga frågor

- Hur får lärare eller speciallärare tid för intensivundervisning?
- Får alla elever som behöver mattestöd hjälp?
- Tar det lång tid att förbereda undervisningen?
- Hur vet jag vilka missuppfattningar en elev har?



# Frågor





**TACK FÖR ATT NI HAR  
LYSSNAT!**



# Referenser

Gersten, R. M., National Center for Education Evaluation and Regional Assistance (U.S.), & What Works Clearinghouse (Institute of Education Sciences). (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to intervention (RtI) for elementary and middle schools*. Washington, DC: U.S. Dept. of Education, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences.

Sterner, G. (2020). En effektiv modell. I L. Nilsson (red.), *Intensivundervisning i matematik* (s. 7 – 22). NCM.

Hattie, J., Fisher, D. & Frey, N. (2017). *Framgångsrik undervisning i matematik: en praktisk handbok*. (Första utgåvan). Stockholm: Natur & kultur.

McIntosh, A. (2020). *Förstå och använda tal*. NCM.

Olsson, I & Sterner, G. (2019). *Intensivträning i matematik: Tal i bråkform*. Stockholm: Natur och kultur.

Lemov, D. (2021). *Teach like a champion 3.0: 63 techniques that put students on the path to college*. San Francisco: Jossey-Bass.

Barton, C. (2018). *Hjärnan i matematikundervisningen: erfarenhet, vetenskap, klassrumspraktik*. (Första utgåvan). Stockholm: Natur & Kultur.

Skaalvik, E.M. & Skaalvik, S. (2016). *Motivation och lärande*. Stockholm: Natur & Kultur.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk how to structure and lead productive mathematical discussions*. United States of America: Stenhouse Publishers.

Smith, M.S. & Stein, M.K. (2014). *5 undervisningspraktiker i matematik för att planera och leda rika matematiska diskussioner*. Stockholm: Natur & Kultur.

William, D. & Leahy, S. (2015). *Handbok i formativ bedömning strategier och praktiska tekniker*. Stockholm: Natur & Kultur.

Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance, nature, and impact of teacher questions. In *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 774.-82)

Rosenshine. (2012). Principles of instruction: research-based strategies that all teachers should know. *American Educator*, 36(1), 12–19, 39).

